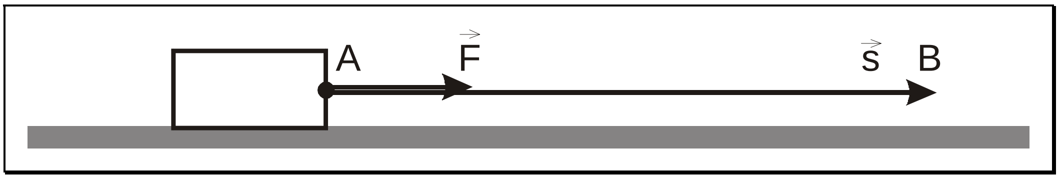
Travail et puissance d'une force

1) Travail d'une force constante sur un chemin rectiligne

a) Force parallèle au déplacement

Déplacement rectiligne: $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$

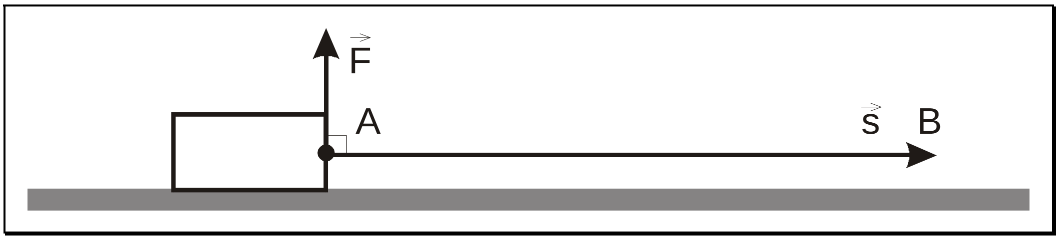


Travail de $\vec{F} = W(\vec{F})$: $\left\{ \begin{array}{l} W(\vec{F}) \sim F \text{ pour s=constant} \\ W(\vec{F}) \sim s \text{ pour F=constant} \end{array} \right\} \Rightarrow W(\vec{F}) \sim F \cdot s$

L'unité pour $W(\vec{F})$ est choisie tel que la constante de proportionnalité soit égale à 1!

Le travail de la force $\vec{F}$ s'écrit donc: $W(\vec{F}) = F \cdot s$

b) Force perpendiculaire au déplacement



$\vec{F}$ n'agit pas suivant le déplacement $\Rightarrow$ $\vec{F}$ n'influence pas le mouvement

$\Rightarrow$ Le travail de la force $\vec{F}$ est nul: $W(\vec{F}) = 0$.

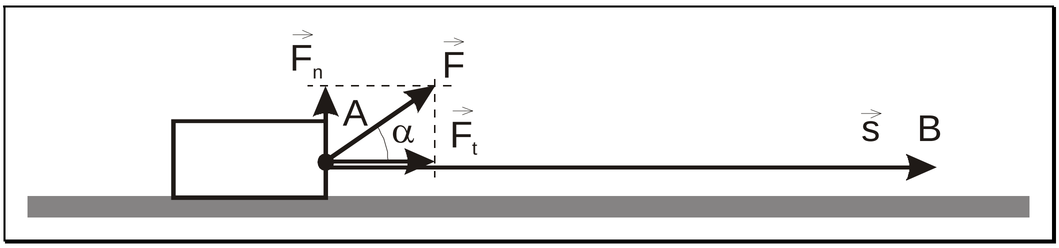
c) Force quelconque

α = angle entre $\vec{F}$ et $\vec{s}$.

Il faut décomposer $\vec{F}$ en $\vec{F}_t$ (composante tangentielle au déplacement) et $\vec{F}_n$ (composante normale au déplacement).

Donc: $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n \Rightarrow W(\vec{F}) = W(\vec{F}_t) + W(\vec{F}_n)$.

Or: $W(\vec{F}_t) = F_t \cdot s = F \cdot \cos\alpha \cdot s$ et: $W(\vec{F}_n) = 0$.



Finalement, le travail de la force $\vec{F}$ au cours du déplacement $\vec{s}$ vaut:

$$W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

On retrouve que si $\alpha = 0$, alors $W = F \cdot s$, et si $\alpha = 90°$, alors $W = 0$!

d) Définition du travail d'une force constante au cours d'un déplacement rectiligne

$$\boxed{W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

Exemple: $F = 3$ N; $s = 2$ m; $\alpha = 30°$.
Travail de $\vec{F}$: $W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha = 3\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} \cdot \cos 30° = 5{,}2$ J.

e) Unité S.I.: le joule (J)

Pour $\alpha = 0$, si $F = 1$ N et $s = 1$ m, alors $W(\vec{F}) = 1$ Nm $= 1$ joule $= 1$ J.

f) Notion de mathématiques: produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ (u_x, u_y) et $\vec{v}$ (v_x, v_y), alors:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = u \cdot v \cdot \cos\alpha \qquad (\alpha = \text{angle entre } \vec{u} \text{ et } \vec{v})}$$

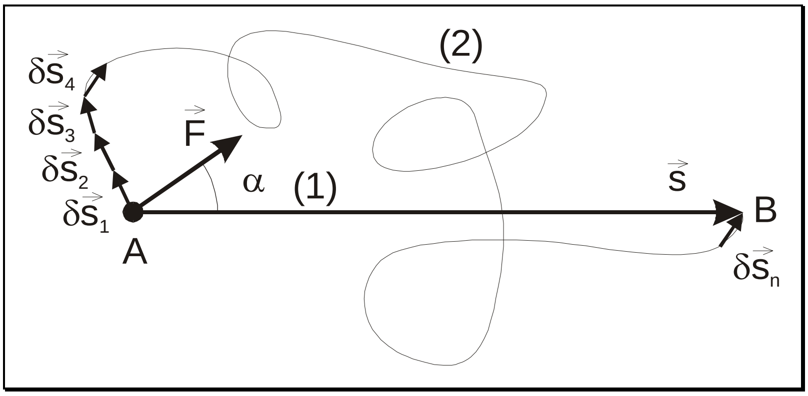
g) Travail moteur et travail résistant

* $0° \leq \alpha \leq 90°$: $\cos\alpha \geq 0 \Rightarrow W \geq 0$: **travail moteur**, car la force contribue au mouvement!

* $\alpha = 90°$: $\cos\alpha = 0 \Rightarrow W = 0$: la force ne travaille pas!

* $90° \leq \alpha \leq 180°$: $\cos\alpha \leq 0 \Rightarrow W \leq 0$: **travail résistant**, car la force s'oppose au mouvement!

2) Travail d'une force constante sur un chemin quelconque



Le corps se déplace de A vers B suivant 2 chemins différents. Il est soumis (entre autres) à la force constante $\vec{F}$.

Evaluons le travail de cette force $\vec{F}$:

* suivant le chemin (1): $W_1 = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

* suivant le chemin (2): On subdivise le chemin en n très petits déplacements $\overrightarrow{\delta s_1}$, $\overrightarrow{\delta s_2}$, $\overrightarrow{\delta s_3}$, ..., $\overrightarrow{\delta s_n}$, et on calcule pour chacun de ces déplacements élémentaires le travail. Le travail W_2 de A vers B est presqu'égal à la somme de ces travaux élémentaires.

  $W_2 \approx \vec{F} \cdot \overrightarrow{\delta s_1} + \vec{F} \cdot \overrightarrow{\delta s_2} + \vec{F} \cdot \overrightarrow{\delta s_3} + ... + \vec{F} \cdot \overrightarrow{\delta s_n}$

  $W_2 \approx \vec{F} \cdot (\overrightarrow{\delta s_1} + \overrightarrow{\delta s_2} + \overrightarrow{\delta s_3} + ... + \overrightarrow{\delta s_n})$

  $W_2 \approx \vec{F} \cdot \vec{s}$

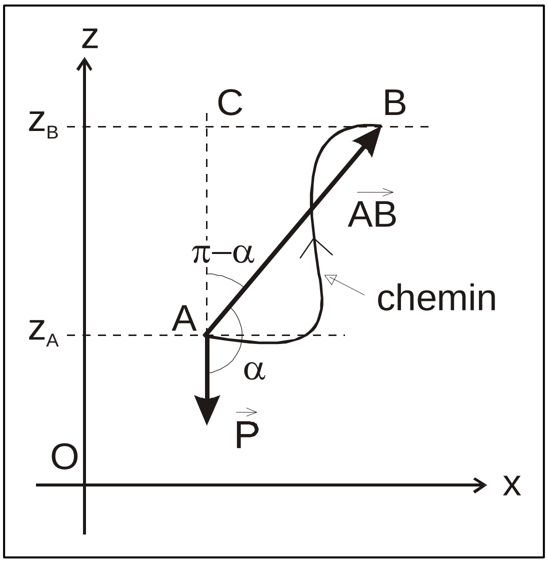
On a $W_2 = \vec{F} \cdot \vec{s}$, si n tend vers l'infini, c.-à-d., si les déplacements élémentaires sont infiniment courts, c.-à-d., si on suit exactement le chemin (2)!

Conclusion: Le travail d'une force $\vec{F}$ constante est indépendant du chemin suivi entre le point de départ A et le point d'arrivée B:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\alpha}$$

3) Exemple 1: travail du poids d'un corps

a) Expression mathématique



* Corps transporté de A vers B vers le haut (par un opérateur, par exemple).

Considérons le repère d'axes Ox (axe horizontal) et Oz (axe vertical = axe des altitudes).

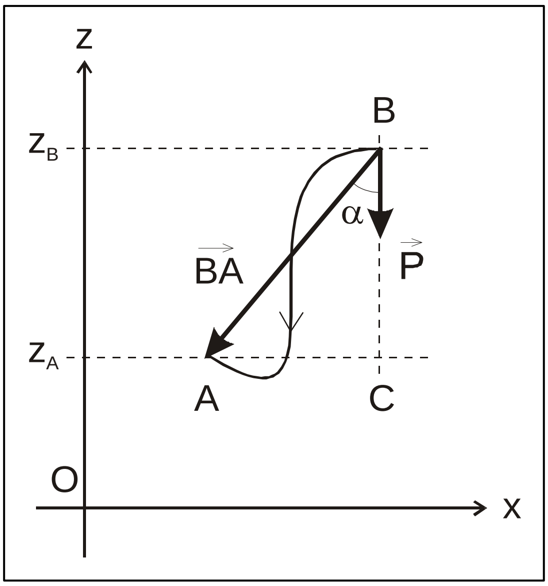
A = point initial = point de départ; B = point final = point d'arrivée.

Le poids $\vec{P}$ est constant au cours du déplacement, donc son travail $W(\vec{P})$ est indépendant du chemin suivi, et:

$$W(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB} = P\cdot AB\cdot\cos\alpha.$$
$$= -P\cdot AB\cdot\cos(\pi-\alpha)$$
$$= -P\cdot AC$$

Or $AC = z_B - z_A = z_f - z_i = \Delta z > 0$.

Donc: $W(\vec{P}) = -P\cdot\Delta z = -mg\cdot\Delta z < 0$ (travail résistant)



* Corps transporté de B vers A vers le bas.

$$W(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{BA} = P\cdot BA\cdot\cos\alpha = P\cdot BC$$

Or $BC = z_B - z_C = z_i - z_f = -\Delta z > 0$.

Donc: $W(\vec{P}) = -P\cdot\Delta z = -mg\cdot\Delta z > 0$ (travail moteur).

Conclusions:

1) Quel que soit le déplacement, le travail du poids s'écrit:

$$\boxed{W(\vec{P}) = -P\cdot\Delta z = -mg\cdot\Delta z}$$

2) $W(\vec{P})$ sur chemin AB = $-W(\vec{P})$ sur chemin BA.

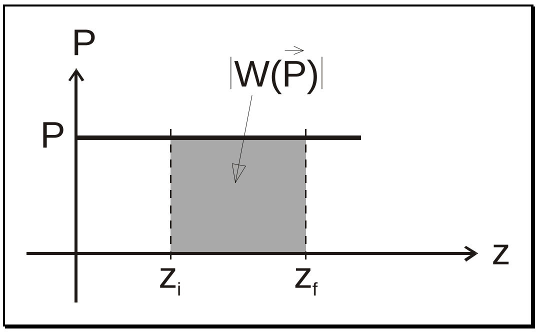
Remarque:

La force nécessaire pour soulever, en ligne droite et à vitesse constante, un corps de poids $\vec{P}$ est $\vec{F} = -\vec{P}$ (principe d'inertie!).

Cette force est exercée par un opérateur, par exemple. Ou bien elle est la résultante de plusieurs forces qui ont pour effet d'équilibrer le poids.

En tout cas: $W(\vec{F}) = -W(\vec{P}) = +mg \cdot \Delta z$

b) Représentation graphique du travail du poids



Méthode: On représente graphiquement l'intensité de la force en fonction de l'abscisse repéré sur un axe parallèle à la direction de la force.

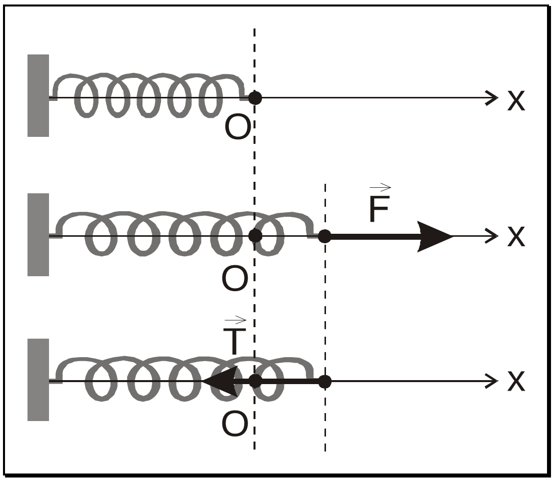
Dans le cas du poids, on représente donc P = f(z)! Comme P est constant, la représentation de P = f(z) est une droite, parallèle à Oz.

Nous constatons que l'aire entre la courbe P = f(z) et l'axe Oz, pris entre le point initial et le point final, représente la valeur absolue du travail du poids!

Cette méthode s'applique aussi dans les cas où la force varie en fonction de l'abscisse, comme on va le voir dans l'exemple suivant!

4) Exemple 2: travail de la tension d'un ressort

a) Force nécessaire pour tendre un ressort



On définit un axe Ox des abscisses:

Origine O: extrémité libre du ressort non tendu;

Direction: parallèle à la direction de la tension $\vec{T}$;

Orientation tel que l'allongement $x > 0$.

$\vec{F}$: force exercée par un opérateur sur le ressort, nécessaire pour tendre le ressort d'une longueur x.

$\vec{T}$: tension du ressort = force exercée par le ressort tendu sur l'opérateur = force de rappel qui tend à ramener le ressort dans son état non tendu.

Principe des actions réciproques: $\vec{F} = -\vec{T}$

Intensités: $F = T$

Rappel de la loi de Hooke: $\boxed{T = k \cdot |x|}$ où k est la raideur du ressort.

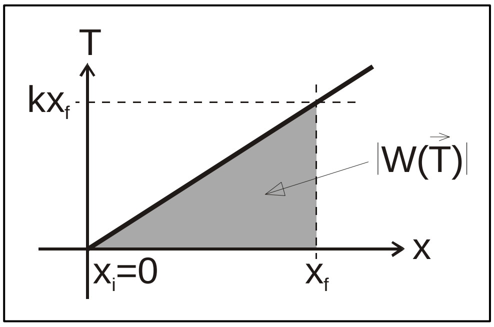
Unités S.I.: si F = 1 N et x = 1 m, alors k = 1 N/m.

Attention: $T \neq$ constant, T varie au cours du déplacement

b) Expression mathématique du travail de la tension du ressort

* On tend le ressort d'un point initial d'abscisse $x_i = 0$ (origine O), jusqu'à un point final d'abscisse $x_f > 0$.

Afin de trouver le travail $W(\vec{T})$ nous utilisons la méthode graphique: nous représentons l'intensité de la force T en fonction de l'abscisse x.



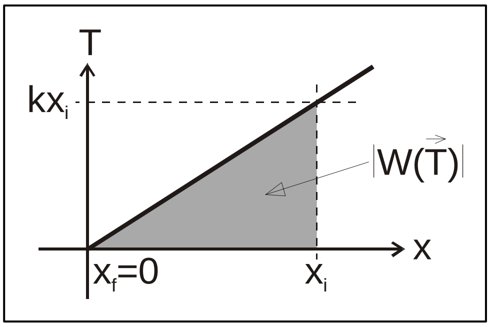
L'aire entre la courbe T = f(x) et l'axe Ox pris entre x_i et x_f est égal à $\left|W(\vec{T})\right|$!

$$\left|W(\vec{T})\right| = \frac{kx_f \cdot x_f}{2} = \frac{1}{2} k \cdot x_f^2$$

Or $W(\vec{T})$ résistant $\Rightarrow$ $W(\vec{T}) < 0$

Donc: $W(\vec{T}) = -\frac{1}{2} k \cdot x_f^2$

* On relâche le ressort d'un point initial d'abscisse $x_i \neq 0$, jusqu'à un point final d'abscisse $x_f = 0$ (origine O).

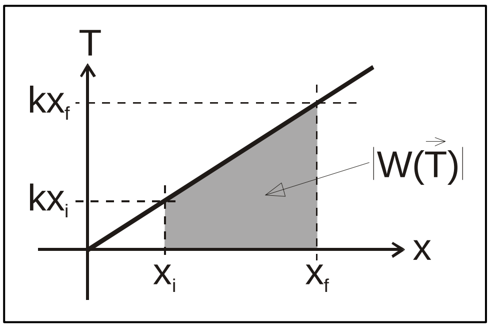


$$\left|W(\vec{T})\right| = \frac{kx_i \cdot x_i}{2} = \frac{1}{2} k \cdot x_i^2$$

Or $W(\vec{T})$ moteur $\Rightarrow$ $W(\vec{T}) > 0$

Donc: $W(\vec{T}) = \frac{1}{2} k \cdot x_i^2$

* On tend le ressort d'un point initial d'abscisse $x_i \neq 0$, jusqu'à un point final d'abscisse $x_f > x_i$.

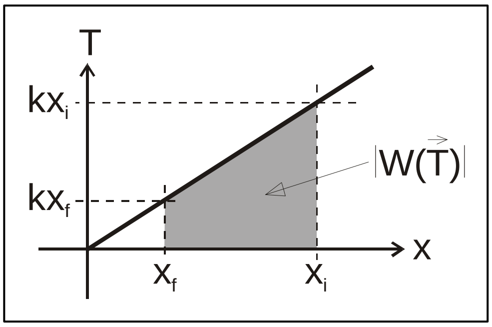


$$\left|W(\vec{T})\right| = \frac{kx_f \cdot x_f}{2} - \frac{kx_i \cdot x_i}{2} = \frac{1}{2} k \left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Or $W(\vec{T})$ résistant $\Rightarrow$ $W(\vec{T}) < 0$

Donc: $W(\vec{T}) = -\frac{1}{2} k \left(x_f^2 - x_i^2\right)$

* On relâche le ressort d'un point initial d'abscisse $x_i \neq 0$, jusqu'à un point final d'abscisse $x_f < x_i$ ($x_f \neq 0$).



$$\left|W(\vec{T})\right| = \frac{kx_i \cdot x_i}{2} - \frac{kx_f \cdot x_f}{2} = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)$$

Or $W(\vec{T})$ moteur $\Rightarrow$ $W(\vec{T}) > 0$

Donc: $W(\vec{T}) = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right) = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)$

Conclusion:

Quel soit le déplacement de l'extrémité d'un ressort (et donc de sa tension), le travail de la tension du ressort s'écrit:

$$\boxed{W(\vec{T}) = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = -\frac{1}{2}k\Delta\left(x^2\right)}$$

c) Travail de la force nécessaire pour tendre le ressort

Cette force est la force $\vec{F} = -\vec{T}$.

Donc: $W(\vec{F}) = -W(\vec{T}) = \frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = \frac{1}{2}k\Delta\left(x^2\right)$

5) Puissance $\mathcal{P}$ d'une force constante

a) Définition

* $\mathcal{P}$ = travail effectué par la force par seconde.
  Donc, si une force effectue un travail W pendant la durée Δt, sa puissance $\mathcal{P}$ vaut:

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t}}$$

* Si W < 0, alors $\mathcal{P} < 0$; mais généralement on ne s'intéresse qu'à la valeur absolue de la puissance.

b) Unités S.I.: le watt (W)

Si W = 1 J et Δt = 1 s, alors $\mathcal{P}$ = 1 watt = 1 W.

c) Relation entre puissance et vitesse de déplacement du corps

Il faut que la force $\vec{F}$ soit constante et que la vitesse $\vec{v}$ de déplacement soit constante (mouvement rectiligne uniforme)!

Dans ce cas: $W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha$ et: $s = v \cdot \Delta t$.

La puissance P de la force s'écrit alors: $\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \cdot s \cdot \cos\alpha}{\Delta t} = \frac{F \cdot v \cdot \Delta t \cdot \cos\alpha}{\Delta t}$

$$\boxed{\mathcal{P} = F \cdot v \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

d) Autre unité pour le travail: le kilowatt-heure (kWh)

On a: $W = \mathcal{P} \cdot \Delta t$.

* Si $\mathcal{P}$ = 1 kW et Δt = 1 h, alors W = 1 kW·1 h = 1 kWh.

* 1 kWh = 1000 W·3600 s = $3{,}6 \cdot 10^6$ J

$$1\,\text{J} = \frac{1}{3{,}6 \cdot 10^6}\,\text{kWh}$$

Exercices

Exercices manuel page 125 – 127

7, 9, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20

1. Une personne doit exercer une force de 10 N pour pousser une caisse de masse 5 kg sur un plan incliné de longueur 20 m, faisant un angle de 10° par rapport à l'horizontale. Calculer le travail de la force de frottement. ($g = 9,8\ m/s^2$)
Résultat: -29,8 J.

2. Quel travail un opérateur doit-il fournir pour tendre un ressort de raideur 100 N/m de 10 cm lorsqu'il est initialement:
a) à l'équilibre?
b) déjà tendu de 5 cm?
Résultats: a) 0,500 J; b) 1,0 J