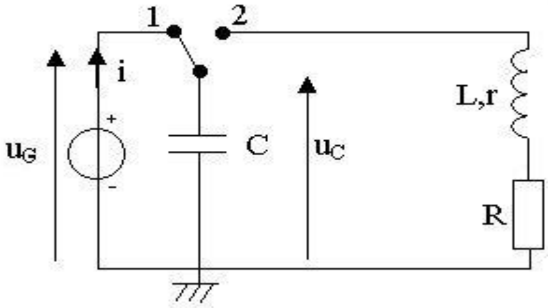
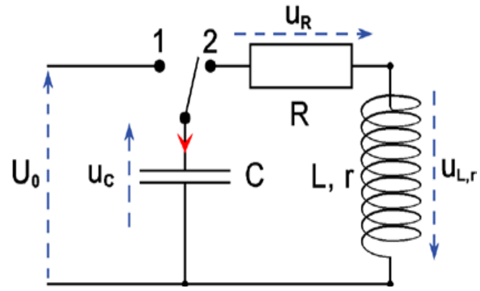
i

Le circuit RLC libre et amorti

On dit qu'un circuit RLC série est en régime libre lorsqu'il ne subit aucun apport d'énergie après l'instant initial.

I- Etude expérimentale





- Quand l'interrupteur est en **position 1, on charge le condensateur**.
- Lorsqu'on bascule l'interrupteur en **position 2, le condensateur se décharge dans la bobine**.
- Lorsque l'on regarde l'évolution de $u_C(t)$, on observe alors **l'apparition d'oscillations électriques amorties.**

Equation différentielle :

$$\mathbf{u_{AB}(t) = u_{L,r}(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R+r}{L}.\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0}$$

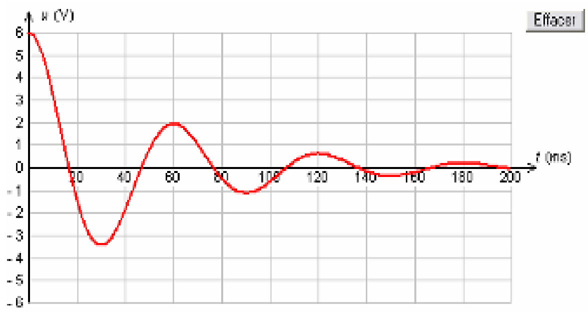
Influence de l'amortissement : 4 régimes possibles

$\frac{R+r}{L}.\frac{du_C(t)}{dt}$ est le terme d'amortissement

L'amortissement, dans un circuit RLC série en régime libre (sans apport extérieur d'énergie), **dépend de la résistance totale du circuit : R_t = R + r**.

a. Régime pseudo-périodique :

valeur de R_t est petite : On observe un **signal périodique** dont **l'amplitude des oscillations décroît** au cours du temps.



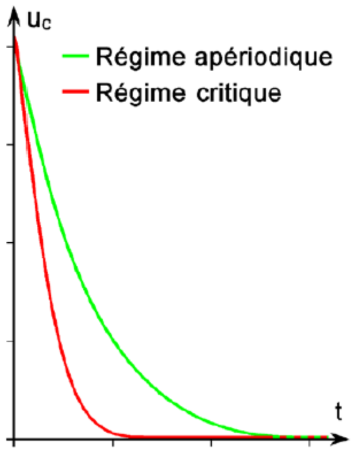
- On appelle la période d'un tel signal la **pseudo-période T**, temps qui s'écoule **entre deux valeurs maximales successives**, elle est constante.

b. Régime apériodique :

Quand l'amortissement est trop fort (valeur de R_t trop grande) alors **il n'y a plus d'oscillations**

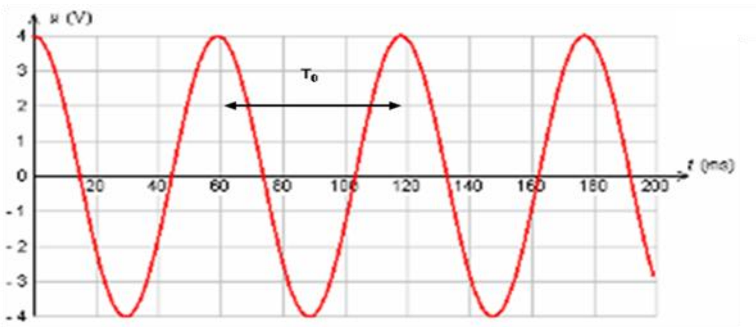
c. Régime critique :

Il existe une **valeur de R_t** pour laquelle on passe du **régime pseudo-périodique au régime apériodique**. Cette valeur de résistance est nommée résistance critique et le régime correspondant s'appelle également le régime critique.



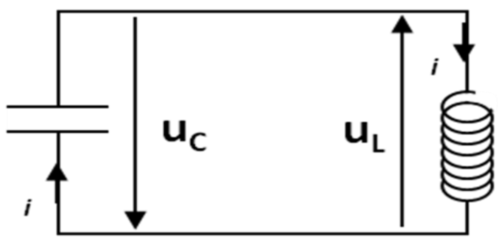
d. Régime périodique :

Si **l'amortissement est négligeable** (ce qui ne peut exister en pratique pour un circuit libre), le système est le siège **d'oscillations non amorties**, le régime est alors périodique. Les oscillations sont de périodes T_0.



Doc n°4

II Etude de l'oscillateur non amorti



Doc n°6

a. Etablissement de l'équation différentielle :

La charge du condensateur initiale est q_0 et la bobine a une résistance négligeable

D'après la loi des tensions (mailles) : $u_C + u_L = 0$

- Or $u_L = L \times \frac{di}{dt}$ avec $i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$

  d'où $u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$

- Ainsi : $$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \times u_C = 0}$$

Soit une solution de la forme : $u_C = U_m \times \cos(\omega_0 t + \phi)$

Avec U_m, ω_0 et ϕ sont trois constantes à déterminer.

Vérifions qu'elle satisfait bien à l'équation différentielle :

- $\frac{du_C}{dt} = -\omega_0 \times U_m \times \sin(\omega_0 t + \varphi)$

  Puis $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\omega_0^2 \times U_m \times \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 \times u_C$

- En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$\left(\frac{1}{LC} - \omega_0^2\right) \times u_C = \left(\frac{1}{LC} - \omega_0^2\right) \times U_m \times \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

- Cette relation doit être vraie quelque soit t ce qui impose :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

On appelle **ω_0** la **pulsation propre des oscillations électriques**. Elle s'exprime en **rad.s^{-1}**.

Période propre des oscillations

Elle est liée à la pulsation propre par la relation :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} \text{ d'où } \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

Unité de T_0 : LC = L/R × RC or L/R et RC sont homogènes à des temps donc LC est homogène à un temps^2. et T_0 homogène à temps.**Donc T_0 s'exprime en s.**

Détermination des deux autres constantes U_m et ϕ

$$u_C = U_m \times \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Ainsi **U_m est appelée amplitude de la tension u_C**, elle sera la tension maximale atteinte par u_C

Et à t = 0 on a $u_C(0) = U_m \times \cos(\phi)$;

ϕ est appelée phase à l'origine des dates, elle s'exprime en radian

- Expression de l'intensité du courant :

$$\text{On sait que : } i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \boxed{i = -\underbrace{C \times \omega_0 \times U_m}_{I_m} \times \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

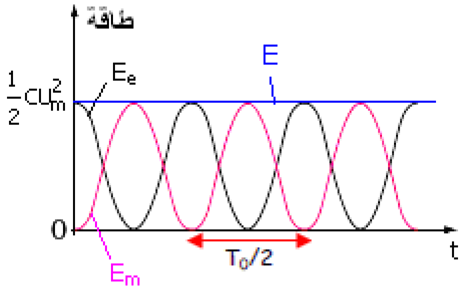
- Etude énergétique d'un circuit LC

L'énergie emmagasinée par un condensateur est : $E_e = \frac{1}{2} C u_c^2$

L'énergie emmagasinée par la bobine est : $E_m = \frac{1}{2} L i^2$

L'énergie totale est :

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}L(C\omega_0 U_m)^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}CU_m{}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}LI_m^2$$



l'énergie totale est constante et il y a un perpétuel transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine.

➢ **Etude énergétique : Régime pseudo-périodique :**

Equation différentielle : $u_C + u_L + u_R = 0$

On pose R'=R+r

$u_R = Ri \qquad u_L = ri + L\frac{di}{dt} \qquad i = C\frac{du_C}{dt}$

Donc : $u_L = rC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$

L'équation différentielle devient : $u_C + R'i + L\frac{di}{dt} = 0$ (*)

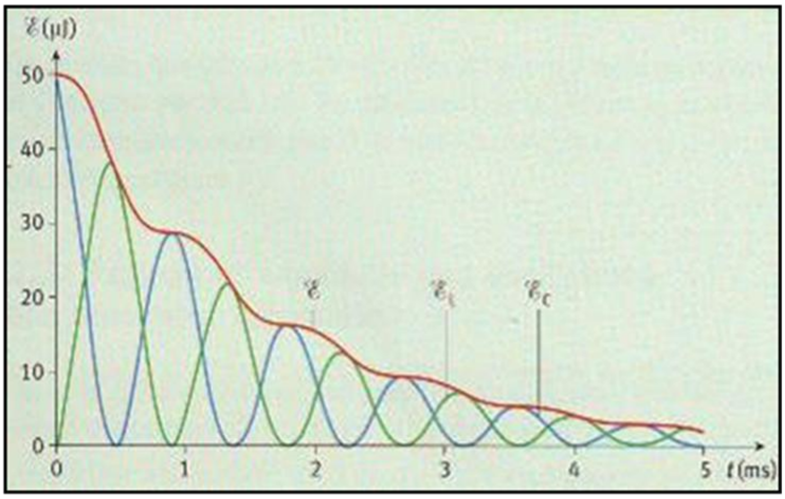
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R'}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

L'énergie totale est $E = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$ soit $\frac{dE}{dt} = Cu_c\frac{du_c}{dt} + Li\frac{di}{dt} = i(u_c + L\frac{di}{dt})$

D'après (*) on a donc $\frac{dE}{dt} = -R'i^2$

➢ **L'énergie totale** (E_C+E_L) **décroît** au cours du temps, cette énergie étant progressivement **dissipée par effet joules** dans la résistance.

➢ Il s’effectue un **transfert d’énergie du condensateur dans la bobine puis de la bobine dans le condensateur** et ainsi de suite. Quand E_C est max alors E_L est nulle et quand E_C est nulle E_L est max.



Doc n°5

➢ Etude de l’oscillateur amorti : entretien des oscillations

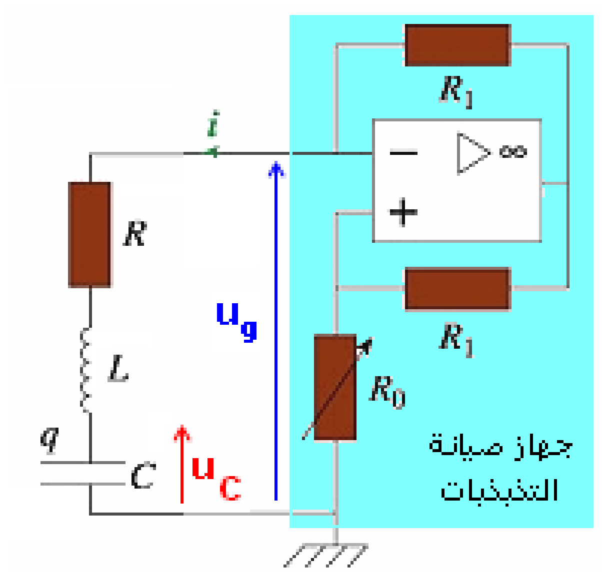
Pour entretenir les oscillations d’un circuit RLC libre, il faut apporter au circuit, par l’intermédiaire d’un dispositif, la même quantité d’énergie qui a été perdue. C’est le rôle du dispositif d’entretien (générateur ug).

➢ **L’énergie perdue correspond à une puissance $P_J = R' \times i^2$.**

Pour entretenir les oscillations , on doit alors insérer une source d’énergie qui fournie la tension u_S vérifiant :

$$P_S = u_S \times i = P_J = R' \times i^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi la source doit fournir : } u_S = R' \times i}$$



L'équation différentielle devient : $u_C + R'i + L\dfrac{di}{dt} = us = R'i$

Soit : $u_C + L\dfrac{di}{dt} = 0$ soit

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \times u_C = 0}$$

On retrouve le régime sans amortissement. On créé une tension sinusoïdale de période : $\boxed{T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$